

DOI: 10.7652/xjtuxb201711014

采用分形理论与微分几何的摆线针轮形貌模型

韩炬^{1,2}, 李威¹, 王志军²

(1. 北京科技大学机械工程学院, 100083, 北京; 2. 华北理工大学机械工程学院, 063210, 河北唐山)

摘要: 根据分形理论与微分几何,应用 Weierstrass-Mandelbrot 函数与矢量函数构建了摆线轮齿与针齿的表面形貌模型,该模型综合体现了摆线轮齿与针齿的宏观特征与微观特征;应用 MATLAB 绘制了各向同性粗糙针齿及单个摆线轮齿的二维截面图,构建了摆线轮齿与针齿的接触比例系数。通过分析可知:接触比例系数随啮合点的变化而变化,且针齿与摆线轮齿内凹部分接触时的接触比例系数远大于针齿与摆线轮齿外凸部分接触时的值;接触比例系数随分形维数的增加而减小,随摆线轮与针轮中心距的增加先增大后减小,随特征尺度、针齿半径和针轮齿数的增加而增大。
关键词: 摆线针轮;分形理论;微分几何;Weierstrass-Mandelbrot 函数;矢量函数;表面形貌模型
中图分类号: TH114 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)11-0097-09

Surface Morphology Models of Cycloid and Pin Teeth Based on Fractal Theory and Differential Geometry

HAN Ju^{1,2}, LI Wei¹, WANG Zhijun²

(1. School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;
2. School of Mechanical Engineering, North China University of Science and Technology, Tangshan, Hebei 063210, China)

Abstract: The key point to analyze the contact characteristics of cycloid and pin wheels is to establish a contact model with comprehensive embodiment of the gross feature and micro-characteristic. A surface topography model of rough surfaces is established based on Weierstrass-Mandelbrot function and differential geometry. The function of cycloid is determined by using a vector function with modification being taken into account. The unit normal vector is calculated with the application of differential geometry. The 2D sections of a pin tooth and a cycloid tooth which is assumed as isotropic are plotted by MATLAB. The contact model between cylinder and rigid flat is established, a parameter called equivalent contact angle is proposed, and the relations of the angle with fractal dimension, characteristic scale and radius of cylinders are studied. Furthermore, the contact proportionality coefficient that is used to describe the contact area between cycloid and pin tooth surfaces is given. The coefficient is less than 1 in any case, and the value for the area between pin tooth and inter part of cycloid is much larger than that for the area in outer part of cycloid. It is indicated by analysis that the value of the coefficient decreases with the increase of the fractal dimension, increases at first and then decreases with the increase of the center distance, and increases with the increase of pin tooth radius, characteristic scale, and number of pin teeth.

Keywords: cycloid and pin teeth; fractal theory; differential geometry; Weierstrass-Mandelbrot function; vector function; surface morphology model

摆线针轮传动机构是工业机器人关节减速器的关键部件,具有结构紧凑、传动效率高、承载能力大、运转平稳等多种优点,其动态性能直接影响到减速器整机的传动性能及其振动、噪声等表现,因此对其啮合特性进行深入研究非常必要。何卫东等在赫兹理论的基础上,计及摆线轮修形引起的初始间隙,建立了摆线轮齿与针齿接触受力和接触变形的数学模型^[1];韩林山等基于应力-强度分布干涉理论,采用蒙特卡罗模拟法对摆线轮齿面的接触应力进行了统计分析^[2];Hsieh应用有限元法对改进的摆线针轮传动结构以及少齿差摆线针轮传动结构进行了接触特性分析^[3-4];Wang等基于赫兹接触理论建立了摆线针轮传动的接触模型,并在此基础上对摆线轮修形与RV减速器刚度的关系进行了研究^[5];Li应用有限元法对摆线针轮减速器的接触特性进行了分析^[6];Yu等应用非赫兹理论对重载摆线针轮传动进行受力分析,得出了与赫兹理论差别较大的结果^[7]。目前,对于摆线针轮传动啮合接触特性的研究主要是基于赫兹理论和有限元法,这2种方法主要关注接触物体的宏观特征,如形状、材料特性等,而忽略了接触表面的微观形貌及表面粗糙度等对接触特性的影响,因此计算结果与实际偏差较大。

自从Mandelbrot提出分形理论^[8]以来,虽然分形的深层机理仍不明确,但由于分形行为在众多领域的客观存在,使得分形理论的应用非常普遍。Brown等指出,机械加工面(如车削、铣削与磨削面)具备明显的分形特征^[9]。Majumdar和Bhushan是较早将分形理论应用到接触问题的研究者^[10-11],他们提出的MB分形接触模型是近年来众多研究的基础模型。MB模型是各向同性的二维模型,基于Weierstrass-Mandelbrot函数(以下简称WM函数)模拟粗糙平面的表面形貌,但由此得出的接触面积小时发生塑性变形而接触面积大时发生弹性变形的结论与经典接触理论相左。Morag和Etsion分析了由MB模型得出与客观事实相反结论的原因,认为主要是MB模型将粗糙面之间的接触变形量等价于微凸体的高度造成的,所以他们引进了随接触深度变化的变形量,提出了ME模型^[12],该模型关注的是单个微凸体的受压变形机理;Miao和Huang在ME模型的基础上,提出了完全的粗糙分形面接触模型^[13]。上述模型及其大量的推广应用,针对的均是

2个粗糙平面之间的接触,而实际的机械零件之间的接触多是粗糙曲面之间的接触,如齿轮副、滚动轴承等涉及到的是柱面与球面。黄康、陈奇等以MB模型为基础提出了HC模型,对两粗糙圆柱面之间的接触特性进行了分析,并将接触模型应用于齿轮副接触分析;在接触模型中引入了接触系数,构建该系数时考虑了接触面的宏观特征,如曲率半径及载荷,还考虑了圆柱面的内接触与外接触问题^[14-18],因而该系数具有一定的合理性,但当粗糙圆柱面外接触时,该系数值明显偏大,相应的分析结果也不准确。此外,由他们的粗糙曲面接触模型得出的微凸体接触变形结论,依然是接触面积小时发生塑性变形,接触面积大时发生弹性变形^[14-18],此结论与经典接触理论相悖,也有悖于常识判断。

目前,尚未见到基于分形理论构建摆线针轮表面形貌模型的相关研究,现有的各种针对简单粗糙曲面的接触分析模型也存在各自的缺陷,例如:赫兹接触模型只考虑了宏观特征;分形接触模型如MB模型、ME模型等只考虑了接触面的微观特性;HC模型在综合应用接触曲面的宏观与微观特征的尝试中也存在明显的不足。本文的研究重点是综合考虑接触曲面的宏观与微观特征,构建摆线针轮传动的分形形貌模型,以期为进一步深入分析摆线针轮机构的接触特性提供理论基础。

1 粗糙曲面的表面形貌模型

1.1 基于WM函数的粗糙平面分形形貌

现有对粗糙平面的分形形貌模拟是以WM函数^[19]为基础的。该函数具有连续、处处不可导和自仿射的特点,其表达式为

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{(D-2)n} (1 - e^{i\gamma^n x}) e^{i\varphi_n} \quad (1)$$

式中: w 为复数; $D(1 < D < 2)$ 为分形维数; n 为频率指数, $n = -\ln l / \ln \gamma$, $l = 1/\gamma^n$; φ_n 为随机相位,主要用于避免不同频率所对应的曲线重叠; γ^n 为粗糙曲面的空间频率, $\gamma > 1$,一般取1.5。当用该函数模拟粗糙面的表面形貌时,微凸体的高度可由式(1)的实部表示

$$z^*(x) = \text{Re}[w(x)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{(D-2)n} [\cos \varphi_n - \cos(\gamma^n x + \varphi_n)] \quad (2)$$

Majumdar 和 Bhushan 根据 W-M 函数提出了适合于工程表面的 M-B 函数,其表达式^[10]为

$$z(x) = G^{(D-1)} \sum_{n=n_i}^{\infty} \gamma^{(D-2)n} \cos(2\pi\gamma^n x) \quad (3)$$

式中: G 为特征尺度,Chen 等通过实验得出的 G 与物体表面粗糙度 R_a 的关系式^[20]为 $G=10^{-5.26/R_a^{0.042}}$;葛世荣等人确定的分形维数与表面粗糙度的关系式^[21]为 $D=1.528/R_a^{0.042}$ 。

1.2 粗糙曲面分形形貌模型的构建思路

分形理论在研究接触问题时一般假设为两粗糙平面之间的接触,而摆线轮与针轮都属于柱形物体,简化为平面问题时误差很大,因此需要构建粗糙曲面的表面形貌模型。

粗糙曲面表面形貌模型的构建思路,是在光滑曲面的基础上添加非平稳随机分布的微凸体。光滑曲面用矢量函数表示,微凸体的高度用 W-M 函数表示,本文将矢量函数与 W-M 函数相结合,以构造粗糙曲面的形貌模型。

根据微分几何知识^[22],二维平面曲线方程为

$$\mathbf{r}(\theta) = x(\theta)\mathbf{i} + y(\theta)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(\theta) \in C^0 \quad (4)$$

式中: $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 分别为坐标轴向的单位向量; $x(\theta)$ 、 $y(\theta)$ 在定义域内连续。

图 1 所示为粗糙曲面的表面形貌示意图,结合 W-M 函数与二维平面曲线方程可知,各向同性粗糙曲面的二维截面方程为

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} \pm z(s) \cdot \mathbf{m} \quad (5)$$

式中: $z(s)$ 为向量 $\mathbf{r}$ 方向上对应的微凸体的高度,由式(3)可知, $z(s) = G^{(D-1)} \sum_{n=n_i}^{\infty} \gamma^{(D-2)n} \cos(2\pi\gamma^n s)$, s 为曲面截面曲线的弧长; $\mathbf{m}$ 为曲线上 K 点的单位法向量, $\mathbf{m} = \frac{(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_{\theta\theta}) \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_{\theta\theta}| |\mathbf{r}_\theta|}$; $\pm$ 与曲线的凹凸有关,当曲线内凹时取“+”,当曲线外凸时取“-”。

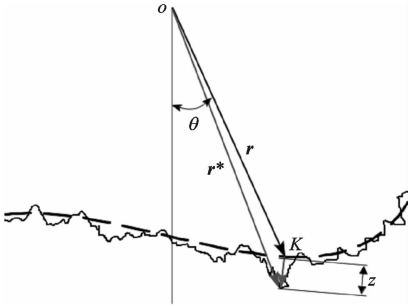


图 1 粗糙曲面表面形貌图

1.3 单个微凸体的接触模型

粗糙面上的微凸体的高度、大小都是随机的。

图 2 所示为单个微凸体与刚性平面的接触模型,该模型中的微凸体变形遵循体积守恒原则。图中 l_r 为真实接触区域半径, l_t 为未变形微凸体被接触面截断的断面半径, δ 为微凸体的高度, w 为微凸体受压后的高度变形量。

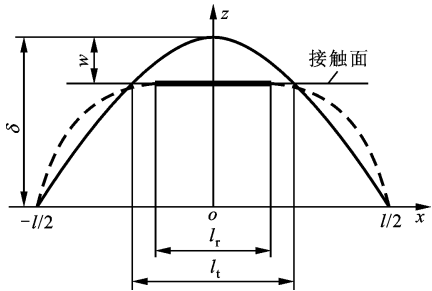


图 2 微凸体与刚性平面接触变形示意图

依据 MB 分形接触模型^[10]可知,单个微凸体高度 $z_a(x)$ 的表达式为

$$z_a(x) = G^{(D-1)} l^{(2-D)} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (6)$$

则微凸体的高度

$$\delta = G^{(D-1)} l^{(2-D)} \quad (7)$$

微凸体顶端的曲率半径

$$R = \frac{l^D}{\pi^2 G^{(D-1)}} \quad (8)$$

由图 2 可知,微凸体与接触面接触后的高度变形量

$$w = \delta - z = \frac{l_t}{2} = \delta \left[1 - \cos\left(\frac{\pi l_t}{2l}\right) \right] \quad (9)$$

2 摆线轮齿与针齿的表面形貌模型

2.1 针齿齿面分形形貌模拟

摆线针轮传动中的针齿为圆柱体,由式(5)可知,针齿齿面的表面形貌模型为

$$\mathbf{r}_p^* = \left[r_p + G^{(D-1)} \sum_{n=n_i}^{\infty} \gamma^{(D-2)n} \cos(2\pi\gamma^n r\theta) \right] \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \quad (10)$$

式中: r_p 为针齿半径; i 是虚数单位。

应用 MATLAB 进行针齿曲面的截面绘制,设 $r_p=10\text{ mm}$, θ 为粗糙圆柱面上的取样范围,令 $\theta \in [1.4\pi, 1.6\pi]$, φ_n 为 $[0, 2\pi]$ 之间的随机值, $\gamma=1.5$, 圆柱面的粗糙度 R_a 为 $1.6\text{ }\mu\text{m}$, 则 $D=1.498\text{ 1}$, $G=6.963\text{ 3 nm}$ 。

图 3 为粗糙圆柱面的形貌图,从中可以看出,圆柱面的表面形貌具有典型的分形特征。

2.2 粗糙摆线轮齿分形形貌模拟

摆线轮的轮廓相对针齿而言复杂得多。图 4 为

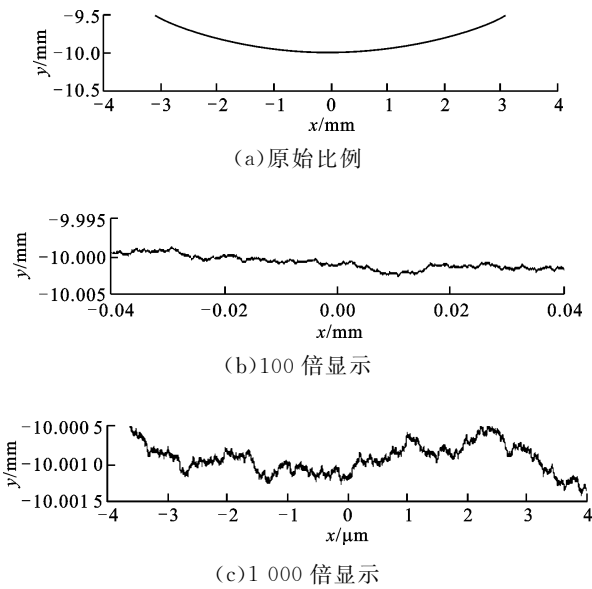


图3 粗糙圆柱面的形貌图

摆线轮轮廓的生成原理简图,据此结合矢量法,建立修形后摆线轮的齿廓方程如下

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_b^* \cos\theta + (R_g S - R_p^*) \cos(\theta + \beta) \\ R_b^* \sin\theta + (R_g S - R_p^*) \sin(\theta + \beta) \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中: $R_b^* = R_b + \Delta R_b$, 其中 R_b 为基圆半径, ΔR_b 为移距修形量; R_g 为滚圆半径; $R_p^* = R_p + \Delta R_p$, 其中 R_p 为针轮半径, ΔR_p 为等距修形量; $S = (1 + K_1^2 + 2K_1 \cos\gamma_0)^{1/2}$, 其中 $K_1 = \frac{a}{R_g}$, a 为针轮中心到滚圆圆心的距离。

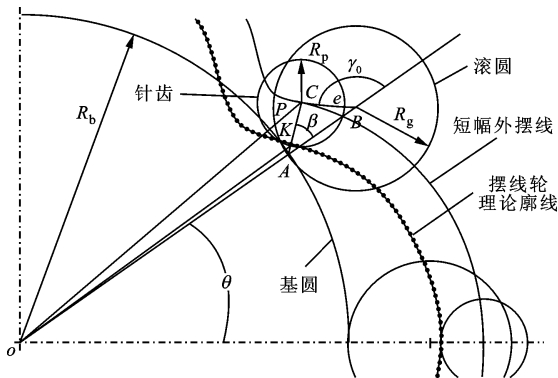


图4 摆线轮廓线生成原理

令 i_0 为摆线轮与针轮的相对传动比, $i_0 = \frac{R_b}{R_g} \gamma_0$
 $= i_0 \theta$; $\tan\beta = \frac{a \sin\gamma_0}{R_g + e \cos\gamma_0}$ 。以 RV20E 减速器的摆线轮为例进行分析,图5中M、N之间的摆线轮轮廓为一个完整的摆线轮齿。

由式(11)可知

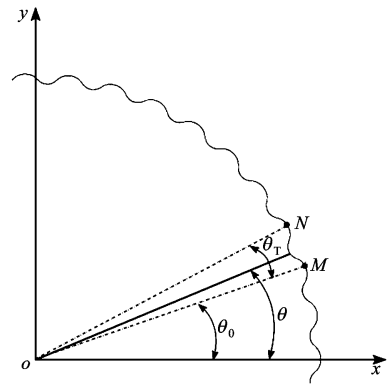


图5 RV20E 减速器摆线轮齿弧长求解示意图

$$\left. \begin{aligned} x_\theta &= -R_b^* \sin\theta + R_g S_\theta \cos(\theta + \beta) - \\ &\quad (R_g S - R_p^*) \sin(\theta + \beta) \beta_\theta \\ y_\theta &= R_b^* \cos\theta + R_g S_\theta \sin(\theta + \beta) + \\ &\quad (R_g S - R_p^*) \cos(\theta + \beta) \beta_\theta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中

$$\beta_\theta = \frac{i_0 a [R_g \cos(i_0 \theta) + a]}{R_g^2 + 2R_g a \cos(i_0 \theta) + a^2}$$

$$S_\theta = -\frac{1}{2} i_0 S^{-1} \sin(i_0 \theta)$$

$$\left. \begin{aligned} x_\theta &= -R_b^* \cos\theta + R_g S_\theta \cos(\theta + \beta) - \\ &\quad 2R_g S_\theta \beta_\theta \sin(\theta + \beta) - (R_g S - R_p^*) T \\ y_\theta &= -R_b^* \sin\theta + R_g S_\theta \sin(\theta + \beta) + \\ &\quad 2R_g S_\theta \beta_\theta \cos(\theta + \beta) + (R_g S - R_p^*) H \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中: $T = \beta_\theta^2 \cos(\theta + \beta) + \beta_\theta \sin(\theta + \beta)$

$$\beta_\theta = -R_g i_0^2 a \{ \sin(i_0 \theta) U - 2a \sin(i_0 \theta) [R_g \cos(i_0 \theta) + a] \} / U^2$$

$$U = R_g^2 + 2R_g e \cos(i_0 \theta) + a^2$$

$$H = -\beta_\theta^2 \sin(\theta + \beta) + \beta_\theta \cos(\theta + \beta)$$

$$S_\theta = -\frac{1}{2} i_0^2 S^{-1} \cos(i_0 \theta) + \frac{1}{2} i_0 S^{-2} S_\theta \sin(i_0 \theta)$$

由微分几何可知,M、N之间的摆线轮齿的弧长

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} |\mathbf{r}'(\theta)| d\theta \quad (14)$$

式中: $|\mathbf{r}'(\theta)| = (x_\theta^2 + y_\theta^2)^{1/2}$, 其中

$$\begin{aligned} x_\theta^2 + y_\theta^2 &= R_b^{*2} + 2R_b^* R_g S_\theta \sin\beta + R_g^2 S_\theta^2 + \\ &\quad (R_g S - R_p^*)^2 \beta_\theta^2 + 2(R_g S - R_p^*) R_b^* \beta_\theta \cos\beta; \end{aligned}$$

$$\theta_0 = \frac{4\pi}{39}; \frac{4\pi}{39} \leq \theta \leq \frac{6\pi}{39}.$$

综合式(5)、式(11)~(14),可得粗糙摆线针轮单个轮齿的表面形貌模型

$$\mathbf{r}_c^* = \mathbf{r}_c(\theta) + \mathbf{m}_c G^{(D-1)} \sum_{n=n_i}^{\infty} \gamma^{(D-2)n} \cos(2\pi \gamma^n s) \quad (15)$$

$$\text{式中: } \mathbf{m}_c = \frac{[(x_\theta, y_\theta) \times (x_\theta, y_\theta)] \times (x_\theta, y_\theta)}{|(x_\theta, y_\theta) \times (x_\theta, y_\theta)| |(x_\theta, y_\theta)|}.$$

取 $\gamma=1.5$, 摆线轮的粗糙度 R_a 为 1.6, 针轮中心圆半径为 52 mm, 针齿半径为 2 mm, 偏心距为 0.9 mm, 摆线轮齿数为 39, 等距修形量、移距修形量分别为 -0.01 和 -0.012 mm。图 6 为此摆线轮轮齿表面的分形形貌图。

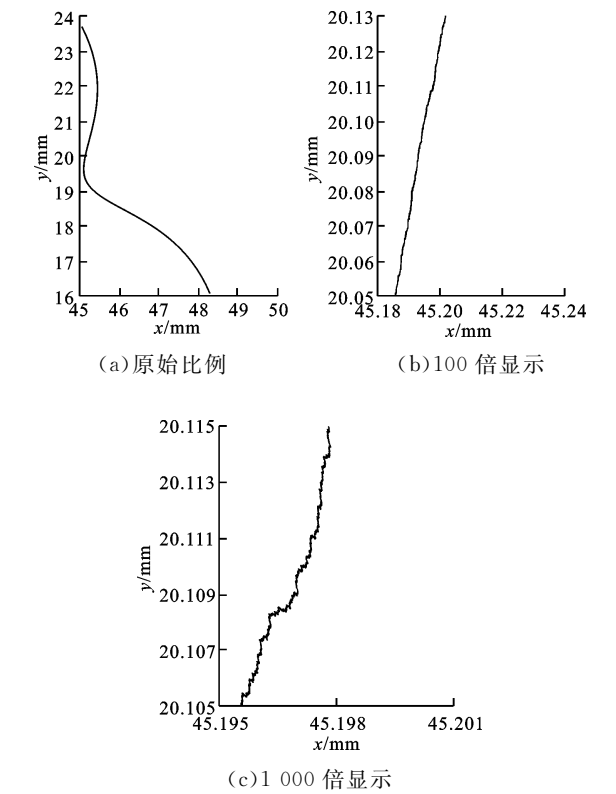


图 6 摆线轮轮齿表面分形形貌图

3 摆线轮齿与针齿的接触比例系数

摆线针轮传动是典型的曲面与曲面接触, 而现有分形接触模型对微凸体接触面积的计算是基于粗糙平面和光滑平面进行的, 粗糙平面曲面化之后, 接触面积将大大减小, 当载荷一定时, 势必造成接触强度的剧烈变化, 因此接触面曲面化之后及平面时的接触比例系数的确定非常关键。

3.1 粗糙曲面与刚性平面的接触模型

图 7 描述了粗糙曲面与刚性平面的接触情况。为研究方便, 将微凸体简化为三角形, 并假设粗糙微凸体随机分布于光滑的刚性面上。图中实线图形为粗糙曲面, A^* 点为粗糙曲面上任意微凸体的顶点, $\overrightarrow{K^*A^*}$ 为光滑曲面的法向量。将粗糙曲面展平后, A^* 点变为 A 点, K^* 点变为 K 点, 由图 7 可知

$$e = y_p - y_s - w = r_o + \delta - |\mathbf{r}^*| \cos \theta^* - w = r_o + \delta - |\mathbf{r} \pm \delta \mathbf{m}| \cos \theta^* - w \quad (16)$$

式中: e 为曲面微凸体顶端到刚性平面的距离; y_s 为

粗糙曲面上某一微凸体到横坐标轴的距离; y_p 为粗糙曲面展平后, 同一微凸体到横坐标轴的距离; w 为刚性平面与展平后的粗糙曲面的接触变形量; $\pm$ 当曲面内凹时取“+”, 当曲面外凸时取“−”。

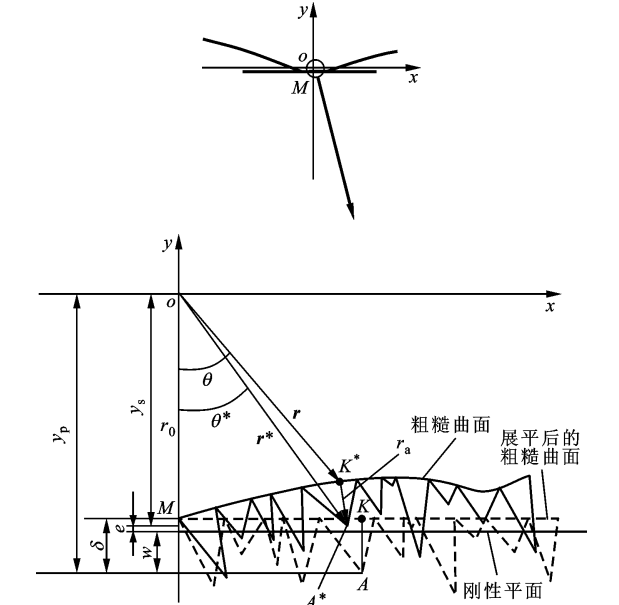


图 7 粗糙曲面与刚性平面接触模型

e 的正负可用于表示刚性平面是否与微凸体接触: 当 $e > 0$ 时, 刚性平面与粗糙曲面上某处的微凸体不接触; 反之, 则发生接触, 且接触的高度变形量为 e 。

当粗糙曲面为圆柱面时, 由式(16)可知

$$e_c = r_c + \delta - (r_c \pm \delta) \cos \theta - w \quad (17)$$

当 $e_c = 0$ 时

$$\cos \theta = \frac{r_c + \delta - w}{r_c \pm \delta} = \left[r_c G^{(1-D)} l^{(D-2)} + \cos \left(\frac{\pi l_1}{2l} \right) \right] / (r_c G^{(1-D)} l^{(D-2)} \pm 1) \quad (18)$$

设此时的幅角为 θ_c , 则当 $\theta > \theta_c$ 时, 粗糙曲面与刚性平面不接触; 当 $\theta < \theta_c$ 时, 粗糙曲面与刚性平面接触。

对于不同的圆柱曲面半径, θ_c 的大小并不能准确反映粗糙圆柱曲面与刚性平面的接触范围。如图 8 所示, 虽然 $\theta_{c2} > \theta_{c1}$, 但可明显看出当圆柱曲面的半径为 r_1 时, 粗糙圆柱面与刚性平面的接触范围更大。为方便比较, 引入接触范围判定角 θ_e , 由图 8 可知

$$\theta_e = \arctan \left(\frac{r_c \sin \theta_c}{r_c + r_c - r_c \cos \theta_c} \right) \quad (19)$$

式中: r_c 为定值, 可根据被比较圆柱面的半径设置, 令 $r_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i$, 其中 N 为圆柱曲面的数量。

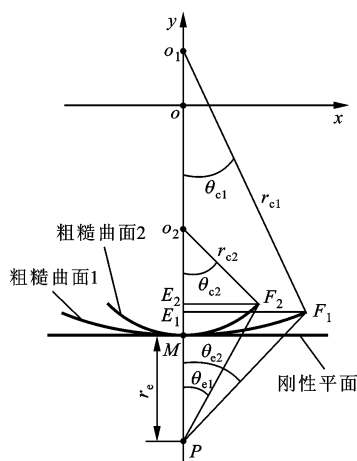
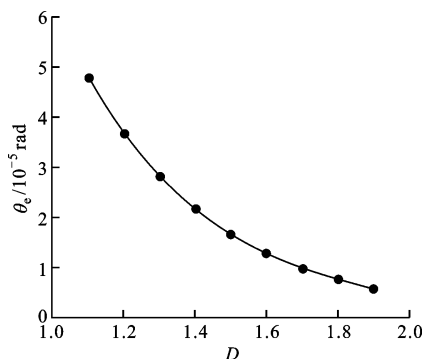


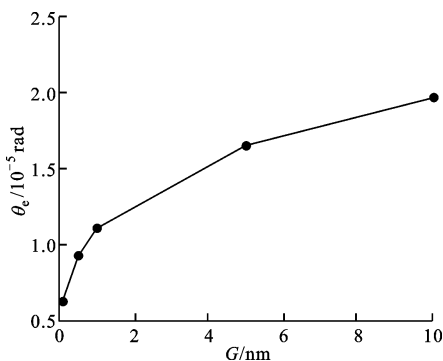
图8 粗糙圆柱曲面与刚性平面的接触范围

图9所示为压力一定时分形维数 D 、特征尺度 G 和圆柱曲面半径 r_c 对接触范围判定角的影响。从图中可知,粗糙圆柱曲面与刚性平面的实际接触范围随 D 的增大而减小,随 G 和 r_c 的增大而增大。该结论的合理性在于:分形维数越大,则粗糙表面越光滑,圆柱粗糙面与光滑平面的接触范围越小;特征尺度增大意味着微凸体的起伏增大,因此圆柱粗糙面与光滑平面的接触范围增大;粗糙圆柱面半径越



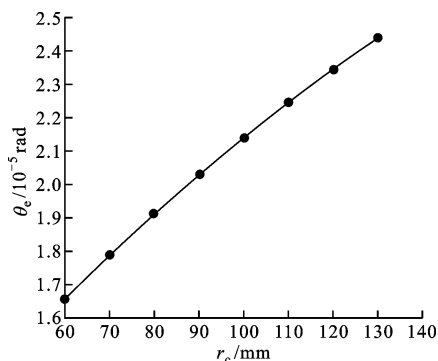
$r_c = 60 \text{ mm}, r_e = 95 \text{ mm}, G = 5 \text{ nm}$

(a) 分形维数对接触范围判定角的影响



$r_c = 60 \text{ mm}, r_e = 95 \text{ mm}, D = 1.5$

(b) 特征尺度对接触范围判定角的影响



$D = 1.5, r_e = 95 \text{ mm}, G = 5 \text{ nm}$

(c) 圆柱面半径对接触范围判定角的影响

图9 各参数对接触范围判定角的影响

大就越接近于粗糙平面,故增大圆柱面半径可增大其与光滑平面的接触范围。

3.2 两粗糙圆柱面的接触比例系数

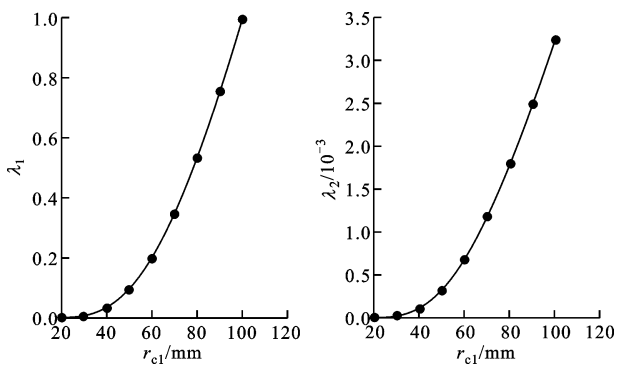
实际的机械传动零件的接触,一般都是2个粗糙曲面之间的接触。结合上节的结论,构建2个粗糙圆柱面接触时的接触比例系数

$$\lambda = \left(\frac{\theta_{c1} \theta_{c2} r_{c2}}{\pi^2 r_{c1}} \right)^{n/\rho} \quad (20)$$

式中: r_{c1} 、 r_{c2} 分别为两圆柱曲面的半径,且始终满足 $r_{c2} \geq r_{c1}$; ρ 为两圆柱曲面的综合曲率半径, $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_{c1}} \pm \frac{1}{r_{c2}}$,当两圆柱面外接触时取“+”,内接触时取“-”。

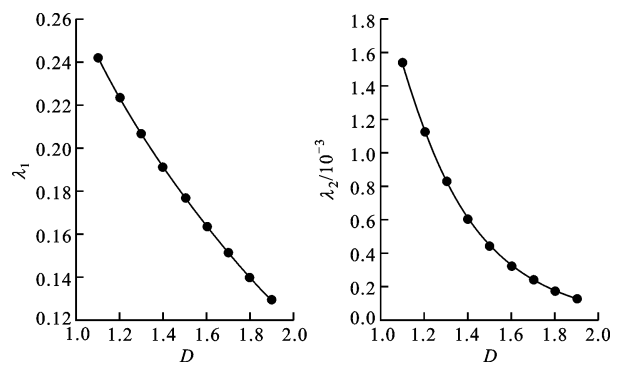
本文构建的接触比例系数借鉴了文献[14]的指数形式,其中的 r_{c2}/r_{c1} 为补偿量,因为 $r_{c2} \geq r_{c1}$,故 $r_{c2}/r_{c1} \geq 1$ 。添加补偿量主要是考虑到两圆柱面内接触时,实际的接触面积大于 θ_{c1}/π 与 θ_{c2}/π 的乘积,添加补偿量后接触比例系数的值会增大,从而使得内接触时的比例系数值更接近实际。虽然补偿量的添加会使两圆柱面外接触时的接触比例系数值偏大,但其对外接触时的影响远小于对内接触时的影响(有1~2个数量级的差别),因此为了保证公式的简洁,补偿量 r_{c2}/r_{c1} 没有区分内接触与外接触的情况。微凸体尺寸对接触面积的影响非常显著,因此,构建的比例系数中引入了与微凸体尺寸相关的微凸体等级系数,即频率指数 n 。

图10所示为圆柱曲面半径、分形维数以及特征尺度对接触比例系数 λ 的影响。为方便比较,令 λ_1 为两圆柱曲面内接触时的接触比例系数, λ_2 为两圆柱曲面外接触时的接触比例系数。从图中可以看出, λ_2 始终小于 λ_1 ,这与实际情况相吻合,也与文献



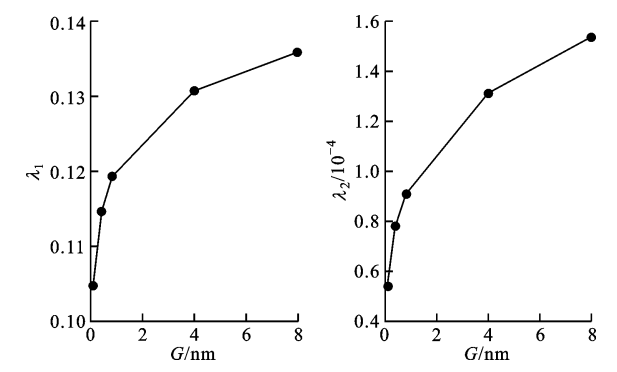
$D=1.5, r_{c2}=100\text{ mm}, G=7\text{ nm}$

(a) 圆柱曲面半径对接触比例系数的影响



$r_{c1}=60\text{ mm}, r_{c2}=100\text{ mm}, G=1\text{ nm}$

(b) 分形维数对接触比例系数的影响



$r_{c1}=60\text{ mm}, r_{c2}=100\text{ mm}, D=1.5$

(c) 特征尺度对接触比例系数的影响

图 10 各参数对两圆柱面接触比例系数的影响

[14,23]中类似参数的情况一致。

从图 10a 可以看出:当两圆柱面的半径相差较大时,圆柱面内、外接触时的 λ 均很小,相当于点接触;当 $r_{c1} \geq 40\text{ mm}$ 时, λ_1, λ_2 的增幅较大;当 $r_{c1} = r_{c2}$ 时, $\lambda_1 = 1$; λ_2 的值始终较小。从图 10b 可以看出,接触比例系数随分形维数的增大而减小,即粗糙圆柱面表面光洁度越高,接触面积就越小。图 10c 表明,接触比例系数随特征尺度的增大而增大。

本文构建的圆柱曲面接触比例系数与粗糙表面

的宏观特征及微观特征均有关。式(20)中的 $\theta_{c1}/\pi, \theta_{c2}/\pi$ 含有宏观参数与微观参数, n 体现了微观参数的影响, $1/\rho$ 体现了宏观参数的影响且考虑到了曲面内、外接触的情况。黄康等在文献[14]中首次提出、并在多项相关研究中应用[14-18]的表面接触系数,以及田红亮等提出的圆柱接触面积比率[23],均只与接触面的宏观特征(如各接触面的曲率及单位线长度载荷)有关,没有考虑到微观特征如分形维数、空间频率以及特征尺度对接触面积的影响。现有文献中对曲面接触系数的构建只具备初步的合理性,其结论包括:接触系数不大于 1;内接触时的接触系数大于外接触时的接触系数;当两圆柱面半径相同时,内接触时的接触比例系数等于 1。在文献[14,23]中,当 $r_{c1} = r_{c2}$ 且两圆柱面外接触时,接触比例系数的值接近 0.85,该值显然不合理。本文采用与文献[14,23]中相同的参数构建的外接触比例系数的值约为 0.003,这一结果与实际情况更加吻合。

3.3 摆线轮齿与针齿的接触比例系数

一个完整的摆线轮齿上包括内凹与外凸两部分,因此在摆线轮齿与针齿接触过程中,其接触比例系数在不断变化。如图 11 所示,将摆线轮齿齿廓离散,可知不同离散点上的曲率半径不同。

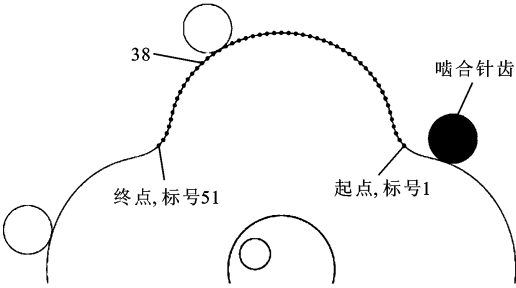


图 11 摆线轮齿离散示意图

结合式(20),构建摆线轮齿与针齿接触时的接触比例系数

$$\lambda_{cp} = \left(\frac{\theta_p \theta_{cp} \rho_{ci}}{\pi^2 \rho_p} \right)^{n/\rho_i} \tag{21}$$

式中: ρ_p 为针齿半径; ρ_{ci} 为摆线轮齿上第 i 个接触点的曲率半径; ρ_i 为第 i 个接触点的综合曲率半径。

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_{ci}}; \quad \rho_i = \frac{\rho_p^2 T_i}{R_z S_c^{3/2}} + \rho_p^{[5]}$$
$$\rho_{ci} = \frac{R_z S_c^{3/2}}{T_i} + \rho_p; \quad S_c = 1 + K_1^2 - 2K_1 \cos \phi_i$$

式中: $T_i = K_1(1 + Z_p) \cos \phi_i - (1 - K_1^2 Z_p)$, 其中 Z_p 为针轮的针齿数; K_1 为摆线轮短幅系数, $K_1 = e Z_p / R_z$; ϕ_i 为啮合相位角, $\phi_i \in [0, 2\pi]$; R_z 为针齿中心圆半径。

图 12 为单对摆线轮齿与针齿在完整啮合过程中接触比例系数的变化。从图中可以看出:当针齿与摆线轮的内凹部分接触时,接触比例系数较大,但最大值远小于 1;当针齿与摆线轮的外凸部分接触时,接触比例系数很小,接近于 0。

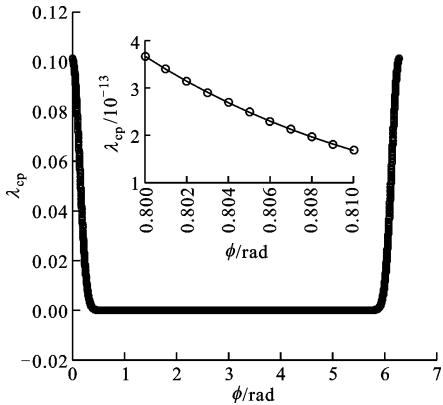
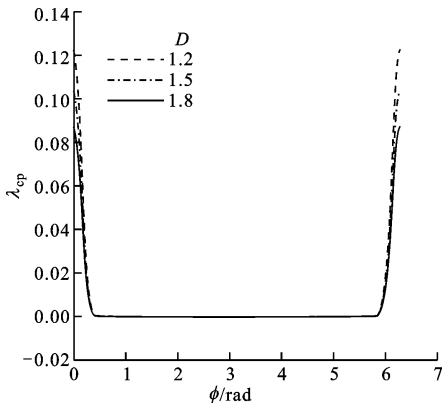
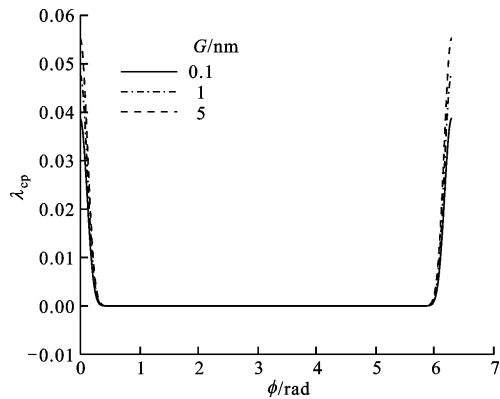


图 12 摆线轮齿与针齿的接触比例系数变化曲线

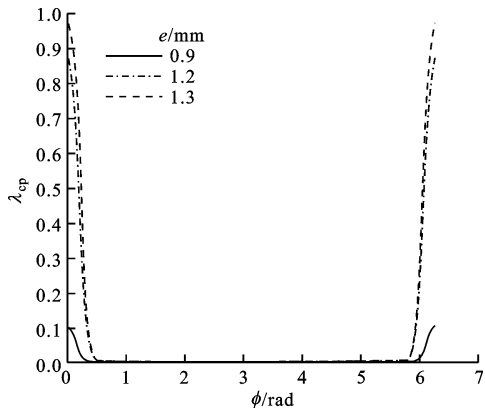
图 13 所示为各参数对摆线轮齿与针齿的接触比例系数的影响。从图中可知:摆线轮齿与针齿的接触比例系数始终小于 1,且针齿与摆线轮齿内凹



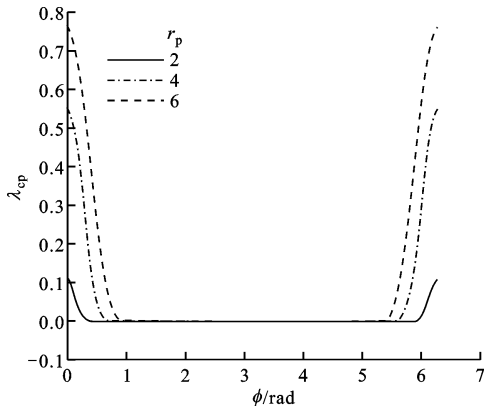
$e=0.9\text{ mm}, r_p=2\text{ mm}, Z_p=40, G=4.903\text{ 1 nm}$
(a) 分形维数对接触比例系数的影响



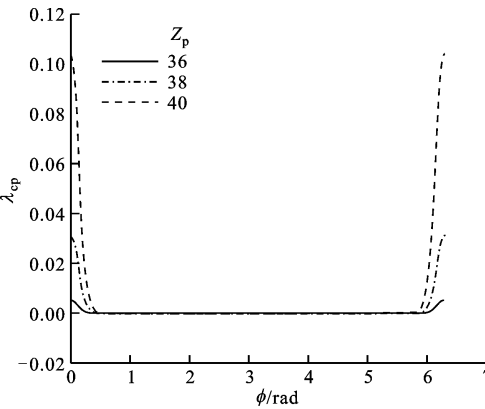
$e=0.9\text{ mm}, r_p=2\text{ mm}, Z_p=40, D=1.5$
(b) 特征尺度对接触比例系数的影响



$r_p=2\text{ mm}, Z_p=40, D=1.5, G=4.903\text{ 1 nm}$
(c) 中心距对接触比例系数的影响



$e=0.9\text{ mm}, Z_p=40, D=1.5, G=4.903\text{ 1 nm}$
(d) 针齿半径对接触比例系数的影响



$e=0.9\text{ mm}, r_p=2\text{ mm}, D=1.5, G=4.903\text{ 1 nm}$
(e) 针轮齿数对接触比例系数的影响

图 13 各参数对摆线轮齿与针齿接触比例系数的影响

部分接触时的接触比例系数远大于与摆线轮齿外凸部分接触时的接触比例系数;接触比例系数随分形维数的增大而减小,随特征尺度、针齿半径和针轮齿数的增加而增大,随摆线轮与针轮中心距离的增加先增大后减小。

4 结 论

本文综合考虑了粗糙摆线轮齿与针齿的宏观和微观特征,将 W-M 函数与微分几何相结合,建立了其表面分形形貌模型,绘制了各向同性粗糙针齿与摆线轮齿的表面形貌图;建立了刚性光滑平面与粗糙圆柱曲面的接触模型,构建了等效接触角及两粗糙圆柱曲面的接触比例系数;以两粗糙圆柱曲面的接触比例系数为基础,构建了摆线轮齿与针齿曲面的接触比例系数,并分析了分形维数、特征尺度和曲面曲率等参数对接触比例系数的影响。获得的具体结论如下。

(1)刚性光滑平面与粗糙圆柱曲面接触时,等效接触角随分形维数的增大而减小,随特征尺度和圆柱曲面半径的增大而增大。

(2)构建的两粗糙圆柱曲面的接触比例系数与现有文献的结论相比更加合理。当 2 个圆柱曲面内接触时,接触比例系数的值较大,且当 2 个圆柱曲面半径相同时,该值为 1,此时相当于 2 个展平平面之间的接触;当 2 个圆柱曲面外接触时,该系数的值较小。接触比例系数的大小与分形维数、特征尺度、曲面曲率等微观和宏观特征均相关。

(3)摆线轮齿与针齿曲面的接触比例系数随着摆线轮齿与针齿啮合点的变化而变化,但其值始终小于 1,且针齿与摆线轮齿的内凹部分接触时的值远大于与外凸部分接触时的值。接触比例系数不仅与针齿半径、针轮齿数、摆线轮齿与针齿的中心距等宏观特征有关,而且与分形维数、特征尺度等微观特征有关。

本文只构建了摆线轮齿与针齿的表面形貌模型,没有进一步对其接触特性进行分析。下一步工作将建立摩擦影响下的摆线针轮分形接触模型,并开展对摆线轮齿与针齿的接触应力和接触面积的测量试验,进一步验证本文的结论。

参考文献:

- [1] 何卫东,李力行,李军. 机器人用 RV 传动中摆线轮受力分析 [J]. 大连铁道学院学报, 1999, 20(2): 49-53.
HE Weidong, LI Lixing, LI Jun. Force analysis on cycloidal gear of the RV drive used in robot [J]. Journal of Dalian Railway Institute, 1999, 20(2): 49-53.
- [2] 韩林山,柯超,齐彩娟. 基于 MATLAB 的 2K-V 型减速器摆线轮疲劳强度可靠性分析 [J]. 矿山机械,

2013, 41(4): 131-134.

HAN Linshan, KE Chao, QI Caijuan. Reliability analysis on fatigue strength of cycloid gear in 2K-V reducer based on MATLAB [J]. Mining & Processing Equipment, 2013, 41(4): 131-134.

- [3] HSIEH C. The effect on dynamics of using a new transmission design for eccentric speed reducers [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 80: 1-16.
- [4] HSIEH C. Traditional versus improved designs for cycloidal speed reducers with a small tooth difference: the effect on dynamics [J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 86: 15-35.
- [5] WANG Jianing, GU Jingjun, YAN Yonghua. Study on the relationship between the stiffness of RV reducer and the profile modification method of cycloid-pin wheel [C]//KUBOTA N, KIGUCHI K, LIU Honghai, et al. Lecture Notes in Computer Science: 9834 Intelligent Robotics and Applications, ICIRA 2016. Berlin: Springer-Verlag, 2016: 721-735.
- [6] LI Shuting. Design and strength analysis methods of the trochoidal gear reducers [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 81: 140-154.
- [7] YU Hongliu, YI Jinhua, HU Xin, et al. Study on teeth profile modification of cycloid reducer based on non-Hertz elastic [J]. Mechanics Research Communications, 2013, 48: 87-92.
- [8] MANDELBORT B B. The fractal geometry of nature [M]. New York, USA: W. H. Freeman and Company, 1982: 35-45.
- [9] BROWN C A, SAVARY G. Describing ground surface texture using contact profilometry and fractal analysis [J]. Wear, 1991, 141: 211-226.
- [10] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1990, 112: 205-216.
- [11] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1991, 113: 1-11.
- [12] MORAG Y, ETSION I. Resolving the contradiction of asperities plastic to elastic mode transition in current contact models of fractal rough surfaces [J]. Wear, 2007, 262: 624-629.
- [13] MIAO Xiaomei, HUANG Xiaodiao. A complete contact model of a fractal rough surface [J]. Wear, 2014, 309: 146-151.

(下转第 136 页)